

M2. WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI WAHADŁA OBERBECKA

opracowała Bożena Janowska-Dmoch

Do opisu ruchu obrotowego ciał stosujemy prawa dynamiki ruchu obrotowego, w których występują wielkości takie jak: prędkość kątowna, przyspieszenie kątowe, moment pędu, moment siły i moment bezwładności. Moment bezwładności pełni w ruchu obrotowym rolę analogiczną do roli masy w ruchu postępowym. Im większa jest wartość momentu bezwładności danego ciała tym trudniej jest zmienić stan jego ruchu obrotowego.

Cel

Celem pomiarów jest wyznaczenie momentu bezwładności przyrządu, zwanego wahadłem Oberbecka. Dokonamy oceny wpływu sił oporu na wartość wyznaczanego momentu bezwładności.

Wymagania

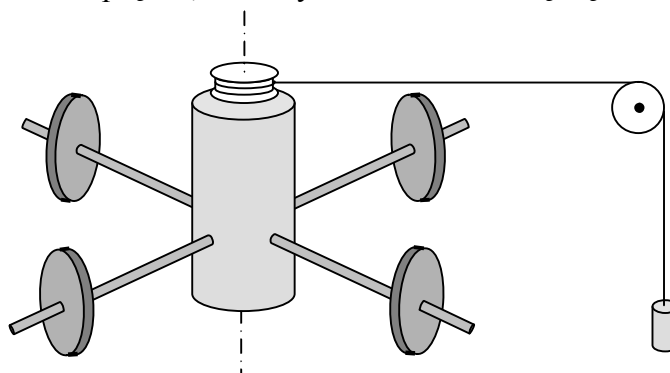
Zasady dynamiki Newtona dla ruchu postępowego i obrotowego, definicje: prędkości kątownej, przyspieszenia kąowego, momentu bezwładności dla punktu materialnego i dla bryły sztywnej, momentu pędu, momentu siły, pracy w ruchu obrotowym, energii kinetycznej i potencjalnej w ruchu postępowym, energii kinetycznej ruchu obrotowego. Prawo zachowania momentu pędu, prawo zachowania energii mechanicznej.

Literatura

- R. Resnick, D. Halliday, Fizyka, tom I, PWN
- C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, Mechanika, *Kurs berkeleyjski tom I*, PWN
- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki, tom I, PWN
- A. Piekara, Mechanika ogólna, PWN

Opis przyrządu

Wahadło Oberbecka składa się z korpusu w kształcie walca, który może się obracać wokół osi symetrii i zamocowanych do niego czterech prętów, na których umieszczone są ciężarki. Położenie ciężarków na prętach może być zmieniane, co powodować będzie zmiany momentu bezwładności wahadła. W górnej części przyrządu znajduje się szpulka, na którą nawija się nić. Nić przetrzuca się przez błoček i obciąża ciężarkiem, a wtedy moment siły naciągu nici wprawia wahadło w ruch obrotowy.



Wyprowadzenie wzoru

I. Zanedbujemy wpływ sił oporu.

Wahadło Oberbecka porusza się ruchem obrotowym zmiennym. Najłatwiej opisać ten ruch wykorzystując rozważania energetyczne całego układu. Gdy pomijamy wpływ sił nie zachowawczych, to prawo zachowania energii mechanicznej układu zapiszemy

$$\Delta E_C = E_{C2} - E_{C1} = 0,$$

gdzie E_{C1} jest początkową energią mechaniczną układu, a E_{C2} jest końcową energią mechaniczną układu. W chwili początkowej, gdy wahadło spoczywa, a ciężarek napinający nić jest podtrzymywany na wysokości h nad podłogą, całkowita energia mechaniczna układu jest równa energii potencjalnej ciężarka

$$E_{C1} = m g h,$$

gdzie m jest masą ciężarka napędzającego. Po zwolnieniu ciężarka w chwili, gdy znajduje się on tuż nad powierzchnią podłogi całkowita energia mechaniczna układu jest równa energii kinetycznej ruchu postępowego ciężarka i energii kinetycznej ruchu obrotowego wahadła, czyli

$$E_{C2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2},$$

gdzie I_0 jest momentem bezwładności wahadła z pominięciem sił oporu. Prawo zachowania energii mechanicznej zapiszemy więc

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} - m g h = 0.$$

Jeśli nić jest nierozciągliwa i nie ślizga się po szpulki, to między prędkością liniową ciężarka i prędkością kątową wahadła zachodzi związek

$$v = \omega r,$$

gdzie r jest promieniem szpulki.

Po wstawieniu powyższej relacji do prawa zachowania energii i po przekształceniu wzoru zapiszemy moment bezwładności

$$I_0 = mr^2 \left(\frac{2gh}{v^2} - 1 \right).$$

Ciężarek opada z wysokości h ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem a bez prędkości początkowej. Ruch ciężarka opisują równania

$$v = at \quad \text{i} \quad h = \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2h}{t},$$

a wtedy wzór na moment bezwładności przyjmie postać:

$$I_0 = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right).$$

Aby wyznaczyć moment bezwładności I_0 musimy znać masę ciężarka, promień szpulki, wysokość, z której opada ciężarek i czas spadania ciężarka.

II. Uwzględniamy wpływ sił oporu.

Jeśli w układzie działają siły nie zachowawcze (opory ruchu), to zmiana całkowitej energii mechanicznej układu jest równa pracy sił nie zachowawczych, co zapiszemy wzorem:

$$\Delta E_C = E_{C2} - E_{C1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - mgh = W,$$

gdzie I jest momentem bezwładności po uwzględnieniu wpływu sił oporu na ruch wahadła. Praca wykonywana przez siły oporu wpłynie więc na wartość wyznaczanego momentu bezwładności.

Siły tarcia i oporu w łożysku hamują ruch obrotowy krzyżaka. Moment sił oporu względem osi obrotu oznaczmy literą \mathcal{T} . Ma on kierunek równoległy do osi obrotu, a zwrot przeciwny do momentu siły naciągu nici rozpędzającego wahadło, dlatego praca sił oporu jest ujemna i wynosi

$$W = -\int_0^\alpha \mathcal{T} d\alpha.$$

Zakładamy, że moment sił oporu jest stały w czasie czyli, że hamowanie odbywa się ze stałym w czasie przyspieszeniem kątowym ε , a wtedy $d\alpha = \omega dt = \varepsilon t dt$

$$W = -\int_0^\alpha \mathcal{T} d\alpha = -\mathcal{T}\varepsilon \int_0^t t' dt' = -\frac{1}{2}\varepsilon t^2 = -\frac{1}{2}\mathcal{T}\omega t.$$

Zmiany całkowitej energii mechanicznej układu zapiszemy

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - mgh = -\frac{1}{2}\mathcal{T}\omega t.$$

Moment sił hamujących możemy wyznaczyć badając zatrzymywanie się wahadła, czyli ten etap ruchu, gdy jedynie moment sił hamujących jest różny od zera, a wtedy zmiana całkowitej energii mechanicznej będzie opisana równaniem

$$\Delta E'_C = W, \text{ czyli } 0 - \frac{I\omega^2}{2} = -\frac{1}{2}\mathcal{T}\omega T \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T} = \frac{I\omega}{T}$$

gdzie czas T jest czasem od momentu uwolnienia nitki ze szpulki do zatrzymania wahadła. Po wstawieniu do równania opisującego zmiany całkowitej energii mechanicznej układu, uwzględniając relację $v = \omega r$, otrzymujemy

$$I\left(1 + \frac{t}{T}\right) = mr^2\left(\frac{2gh}{v^2} - 1\right),$$

a stąd

$$I = mr^2\left(\frac{2gh}{v^2} - 1\right)\frac{T}{t+T} = I_0\frac{T}{t+T}.$$

Do wyznaczenia momentu bezwładności wahadła z uwzględnieniem sił oporu, oprócz czasu rozpędzania wahadła t , musimy jeszcze znać czas T od momentu uwolnienia nitki ze szpulki do zatrzymania wahadła.

Wykonanie ćwiczenia

Wyniki wszystkich pomiarów muszą być zapisane w sprawozdaniu, opatrzone odpowiednimi jednostkami i podpisane przez asystenta.

1. Pomiar promienia szpulki

Mierzmy suwmiarką kilkakrotnie średnicę szpulki w różnych miejscach na jej obwodzie
Propozycja zapisu wyników:

$$\begin{aligned} d_1 &= \dots & \Delta d &= \dots \\ d_2 &= \dots \\ d_3 &= \dots \text{ itd.} \end{aligned}$$

gdzie Δd jest błędem systematycznym wynikającym z dokładności przyrządu.

2. Pomiar czasu spadania ciężarka

Uwaga: Ruchome walce na prętach powinny być zsunięte na końce prętów i przykręcone śrubami.

Dla każdego z ciężarków napędzających, o masach m_1 , $m_1 + m_2$, $m_1 + m_2 + m_3$, mierzymy kilkakrotnie czas spadania ciężarka z określonej wysokości h .

Masy ciężarków wynoszą:

$$\begin{aligned} \text{Nr 1} & & m_1 &= 49,9 \text{ g} & \Delta m &= 0,1 \text{ g} \\ \text{Nr 2} & & m_2 &= 50,3 \text{ g} \\ \text{Nr 3} & & m_3 &= 49,6 \text{ g} \end{aligned}$$

Propozycja zapisu wyników:

h $\Delta h = \dots$	m	t $\Delta t = \dots$

Do tabeli wpisujemy błędy systematyczne wynikające z dokładności przyrządów pomiarowych.

3. Pomiar czasu wirowania wahadła do zatrzymania

Dla każdego z ciężarków, o masach m_1 , $m_1 + m_2$, $m_1 + m_2 + m_3$, spadających z określonej wysokości h mierzymy jednokrotnie czas wirowania wahadła T od momentu zwolnienia nici ze szpuli do zatrzymania krzyżaka.

Propozycja zapisu wyników:

h $\Delta h = \dots\dots$	m	T $\Delta T = \dots\dots$

Opracowanie wyników

- Obliczamy wartość średnią promienia szpulki i błąd promienia szpulki.
- Obliczamy wartości średnie czasów spadania dla wszystkich ciężarków i ich błędy.
- Dla każdego z ciężarków obliczamy momenty bezwładności I_0 oraz I .
- Metodą propagacji niepewności obliczamy błędy pomiarów momentów bezwładności ΔI_0 oraz ΔI . Błędy wielkości mierzonych bezpośrednio, takich jak m , h , T , są równe dokładności stosowanych przyrządów.
- We wnioskach spróbujemy ocenić
 - jaki wpływ na momenty bezwładności I_0 oraz I mają różne masy obciążników;
 - czy uwzględniając granice błędu można stwierdzić, że $I_0 \neq I$.
 - w jaki sposób siły oporu wpływają na wartość momentu bezwładności.