M4. BADANIE DRGAŃ WAHADŁA PROSTEGO I DRGAŃ ZŁOŻONYCH

tekst opracowała: *Bożena Janowska-Dmoch*

Gdy wypadkowa siła działająca na ciało jest w każdej chwili skierowana do położenia równowagi, tzn. chce zawrócić ciało do tego położenia, a jej wartość jest proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi, to ciało wykonywać będzie oscylacje wokół tego położenia z częstością ω opisane równaniem różniczkowym, zwanym **równaniem oscylatora harmonicznego**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

gdzie zmienna x reprezentuje wychylenie ciała.

Cel

Celem pomiarów jest:
- zbadanie drgań wahadła prostego i sprawdzenie czy okres drgań zależy od masy ciała;
- wyznaczenie wartości przyspieszenia grawitacyjnego;
- składanie drgań harmonicznych.

Wymagania

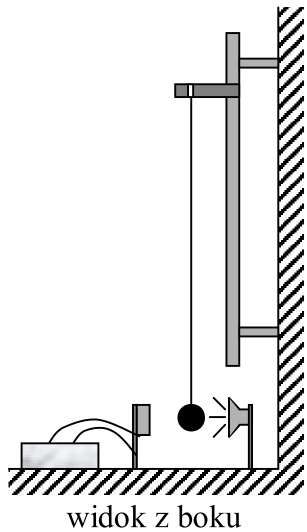
Zasady dynamiki Newtona, równanie ruchu oscylatora harmonicznego, parametry opisujące ruch drgający: wychylenie, amplituda, częstość, faza, przesunięcie fazowe prędkość i przyspieszenie. Energia całkowita, potencjalna i kinetyczna w ruchu drgającym, przemiany energii. Wahadło matematyczne. Składanie drgań.

Literatura

R. Resnick, D. Halliday, Fizyka, tom I, PWN
C. Kittel, W.D. Knight, M.A.Ruderman, Mechanika, *Kurs berkelejowski tom I*, PWN
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki, tom II, PWN
A. Piekara, Mechanika ogólna , PWN

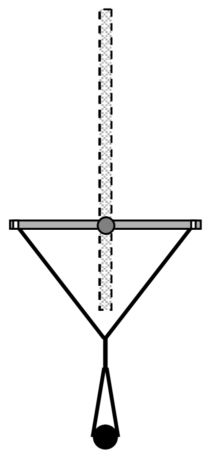
Opis przyrządu

<u>Badanie drgań mechanicznych prostych i złożonych</u>
Wahadło matematyczne:
Do ściany pracowni jest zamocowany pionowy pręt, do którego dokręca się wymiennie pojedynczy zaciskacz nici, ewentualnie długi pręt z dwoma zaciskami. Zaciskacz pojedynczy służy do badania ruchu wahadła prostego, a podwójny do składania drgań. Zastosowanie zaciskaczy pozwala na zmiany długości wahadeł.
Do zliczania wahań służy układ złożony z fotokomórki i licznika impulsów.


widok z boku

Wahadło złożone:

Do pręta mocuje się długi uchwyt z dwoma zaciskami, w których unieruchamia się nici zaczepione do kuli z wydrążonym otworem. Po wypełnieniu wydrążenia kuli proszkiem sypiący się z otworu, w czasie ruchu wahadła, proszek tworzy ślad na płaszczyźnie poziomej.



widok z przodu

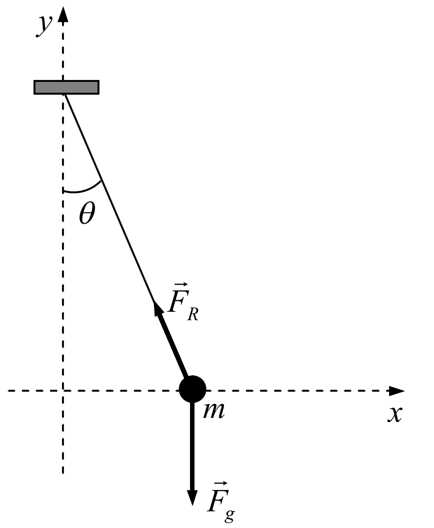
Składanie drgań elektrycznych

Układ elektryczny składa się z transformatora sieciowego, generatora o regulowanej częstotliwości i oscyloskopu. Oscyloskop pracuje w trybie XY. Sygnał z transformatora sieciowego jest podany np. do wzmacniacza odchylania pionowego (osi Y) oscyloskopu, a wtedy sygnał z generatora do wzmacniacza odchylania poziomego (osi X). Częstotliwość sygnału może być, w szerokim zakresie, regulowana w sposób ciągły, co pozwala na dobranie odpowiednich stosunków częstotliwości obu sygnałów i obserwację krzywych Lissajousa.

Wyprowadzenie wzoru

Wahadło proste

Gdy kulkę o masie m zawieszoną na nierozciągliwej nici wychylimy z położenia równowagi o niewielki kąt θ, to będą na nią działały dwie siły: siła grawitacji $\vec{F}_g$, czyli przyciąganie przez kulę ziemską, oraz siła reakcji $\vec{F}_R$ na naciąg nici. Względem punktu zamocowania na masę m działa wypadkowy moment siły równy



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_g + \vec{r} \times \vec{F}_R = \vec{r} \times m\vec{g} = -mgl \sin\theta\, \vec{k}$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem poprowadzonym od osi obrotu do masy m, jego długość jest równa $|\vec{r}| = l$, zaś $\vec{k}$ jest wersorem osi z. Zauważmy, że moment siły reakcji na naciąg znika, bo $\vec{r} \parallel \vec{F}_R$.

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki ruchu obrotowego moment siły nada masie m przyspieszenie kątowe

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{I}\vec{\tau} = -\frac{mgl \sin\theta}{I}\vec{k},$$

gdzie I jest momentem bezwładności kulki. Gdy rozmiary kulki są bardzo małe, to rozkład masy względem osi obrotu można zaniedbać i moment bezwładności jest równy $I = ml^2$.

Ruch kulki opisany jest równaniem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Dla małych wychyleń, gdy $\sin\theta \approx \theta$ zapiszemy

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Jest to **równanie oscylatora harmonicznego** opisujące zmiany kąta wychylenia wahadła zachodzące periodycznie w czasie z jedną częstością

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

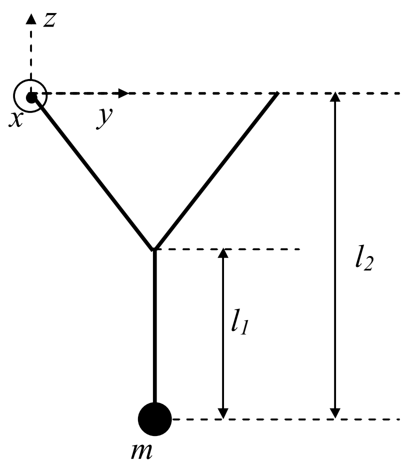
a ponieważ $\omega = \frac{2\pi}{T}$, to okres drgań wahadła zapiszemy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

Okres drgań wahadła prostego jest proporcjonalny do pierwiastka z długości wahadła, a nie zależy ani od masy wahadła, ani od amplitudy drgań.
Znajomość okresu drgań i długości wahadła pozwala wyznaczyć przyspieszenie ziemskie ze wzoru

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\ .$$

Wahadło złożone



Układ nici w kształcie litery Y z zaczepioną do nich masą m może być traktowany jako dwa wahadła o długościach l_1 i l_2 (patrz rysunek).
Gdy kulka zostanie wychylona pod kątem 45^0 zarówno do płaszczyzny xz , jak i do płaszczyzny yz, to wahadło o długości l_2 wahać się będzie równolegle do osi x (w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wyznaczonej przez nici) z częstością $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$, a wahadło o długości l_1 równolegle do osi y z częstością $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$ (w płaszczyźnie litery Y).
Ruch kulki jest sumą dwóch niezależnych, prostopadłych do siebie drgań

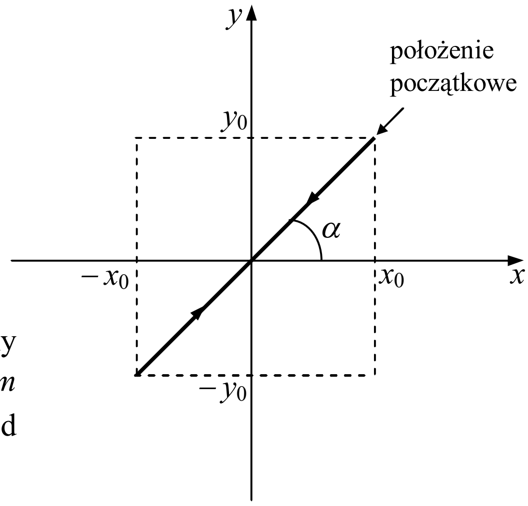
$$\begin{cases} x = x_0 \cos\omega_1 t \\ y = y_0 \cos\omega_2 t \end{cases},$$

gdzie przesunięcia fazowe obu drgań są równe zero, czyli $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.
Równania powyższe są równaniami parametrycznymi krzywej, którą zakreśli masa m w czasie. Krzywa ta nosi nazwę krzywej Lissajousa.
Rozważmy kilka szczególnych przypadków.

Gdy $\omega_1 = \omega_2 = \omega \ (l_1 = l_2)$, to

$$\begin{cases} x = x_0 \cos\omega t & \Rightarrow \quad \cos\omega t = \dfrac{x}{x_0} \\ y = y_0 \cos\omega t \end{cases}$$

$$y = \frac{y_0}{x_0} x .$$

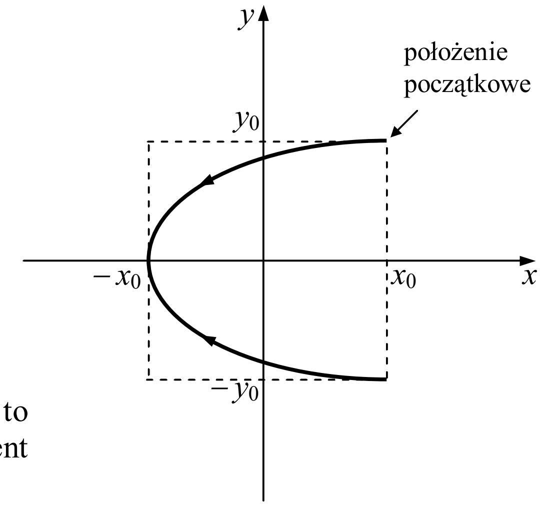


Ponieważ zbiór argumentów jest ograniczony $(x \in [-x_0, x_0])$, to na płaszczyźnie xy masa *m* zakreśli odcinek linii prostej nachylonej pod kątem α do osi x takim, że $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$.

Gdy $\omega_1 = 2\omega_2 = 2\omega \ \left(l_1 = \dfrac{1}{4} l_2\right)$, to

$$\begin{cases} x = x_0 \cos 2\omega t = x_0 \left(2\cos^2 \omega t - 1\right) \\ y = y_0 \cos\omega t & \Rightarrow \quad \cos\omega t = \dfrac{y}{y_0} \end{cases}$$

$$x = 2\frac{x_0}{y_0^2} y^2 - x_0 .$$

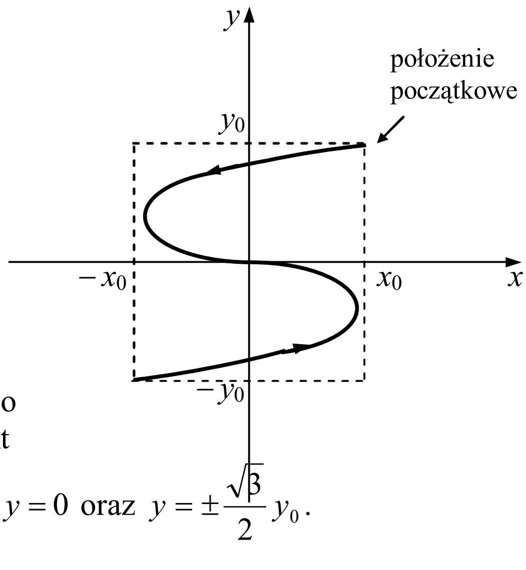


Ponieważ zbiór argumentów jest ograniczony, to na płaszczyźnie xy masa *m* zakreśli fragment paraboli.

Gdy $\omega_1 = 3\omega_2 = 3\omega \ \left(l_1 = \dfrac{1}{9} l_2\right)$, to

$$\begin{cases} x = x_0 \cos 3\omega t = x_0 \left(4\cos^3 \omega t - 3\cos\omega t\right) \\ y = y_0 \cos\omega t & \Rightarrow \quad \cos\omega t = \dfrac{y}{y_0} \end{cases}$$

$$x = 4\frac{x_0}{y_0^3} y^3 - 3\frac{x_0}{y_0} y .$$



Ponieważ zbiór argumentów jest ograniczony, to na płaszczyźnie xy masa *m* zakreśli fragment krzywej trzeciego stopnia o miejscach zerowych $y = 0$ oraz $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} y_0$.

Dla dowolnego stosunku częstości $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ krzywą zakreślaną przez masę *m* na płaszczyźnie xy można znaleźć metodą graficzną (patrz A. Piekara, Mechanika ogólna, rozdz. 2, §30).

Wykonanie ćwiczenia

Wyniki wszystkich pomiarów muszą być zapisane w sprawozdaniu, opatrzone odpowiednimi jednostkami i podpisane przez asystenta.

1. Wahadło proste

a) Do pręta w ścianie pracowni mocujemy pojedynczy ściskacz nici.
b) W kierunku prostopadłym do ściany ustawiamy układ oświetlacza i fotokomórki.
c) Położenie ściskacza regulujemy tak, by dla odmierzonej długości wahadła, kulka zaczepiona do drugiego końca nici, zasłoniła światło latarki skierowane na fotokomórkę (patrz rysunek na stronie 1). Długość nici powinna być większa niż 0,5 m.
d) Wychylamy wahadło z położenia równowagi, przy czym kąt wychylenia nie powinien przekraczać 15^0. Należy zwrócić uwagę na to, by płaszczyzna drgań wahadła była równoległa do ściany.
e) Uruchamiamy licznik naciskając klawisze „+” i „1” jednocześnie.
f) Stoperem mierzymy kilkakrotnie czas 100 **pełnych** wahnięć wahadła.
g) Pomiary wykonujemy dla **co najmniej** trzech długości wahadła.
h) Powtarzamy cykl pomiarów zaczepiając na końcu wahadła różne kulki.

Propozycja zapisu wyników:

Rodzaj kulki: ....

l [*jednostka*]	t_1 $\Delta t =$	t_2	t_3

gdzie Δt jest błędem systematycznym wynikającym z dokładności przyrządu.

2. Drgania złożone

- **Drgania złożone mechaniczne**

a) Wymieniamy pojedynczy ściskacz na pręt z dwoma zaciskami.
b) Regulując nici kuli zaopatrzonej w otwór dobieramy odpowiednie długości wahadeł l_1 i l_2 by otrzymać żądaną krzywą Lissajousa.
c) Zatykamy otwór w kuli palcem i napełniamy wydrążenie proszkiem. Kulę wychylamy o niewielki kąt, tak by znalazła się w płaszczyźnie wychylonej pod kątem 45^0 do płaszczyzny wyznaczonej przez nici w stanie równowagi.
d) Na kartce umieszczonej pod wahadłem rejestrujemy ślady pozostawione przez proszek w czasie jednego pełnego drgania. Ścieżki pozostawione przez proszek utrwalamy

zaznaczając w pewnych odstępach piórem lub długopisem ich ślady na kartce po czym proszek zsypujemy do pojemnika.

e) Rejestrację wykonujemy dla kilku stosunków częstości drgań.

- **Drgania złożone elektryczne**

Sprawdzamy ustawienia wstępne: zakres 3V – 5V na zasilaczu sieciowym 220V 50Hz; tryb pracy XY na oscyloskopie; napięcie wejściowe 3V na generatorze dekadowym.
Po włączeniu zasilania przez asystenta na generatorze dekadowym ustawiamy takie częstotliwości sygnału, by na ekranie oscyloskopu otrzymać obrazy żądanych krzywych Lissajousa. Pokrętło „dostrojenie" pozwala na stabilizację obrazu na ekranie.

Opracowanie wyników

a) Dla każdej kulki i dla każdej długości wahadła obliczamy wartości średnie **okresu** drgań. Błędy obliczamy uwzględniając niepewność losową i systematyczną.

b) Na papierze milimetrowym sporządzamy wykres funkcji, odkładając kwadraty średnich okresów drgań na osi poziomej, a długości wahadeł pomnożone przez $4\pi^2$ na osi pionowej. Zaznaczamy również przedziały błędów ΔT oraz $\Delta(4\pi^2 l)$.(Wykres można sporządzić wykorzystując programy komputerowe).

c) Metodą najmniejszych kwadratów (regresji liniowej) wyznaczamy współczynnik A (A = *g*) nachylenia prostej najlepiej dopasowanej do punktów pomiarowych (B = 0). Nanosimy tę prostą na wykres. Wyznaczamy również błąd ΔA (ΔA = Δg).

d) We wnioskach spróbujmy ocenić
   - czy wyniki pomiarów potwierdzają niezależność okresu drgań od masy wahadła;
   - czy wyniki pomiarów potwierdzają liniową zależność kwadratu okresu drgań od długości wahadła;
   - czy otrzymana wartość przyspieszenia ziemskiego jest zgodna w granicach błędów doświadczalnych z wartością tablicową;
   - czy kształty obserwowanych krzywych Lissajousa, otrzymane ze złożenia drgań mechanicznych o określonym stosunku częstości, pokrywają się z krzywymi otrzymanymi ze złożenia drgań elektrycznych.