M5. BADANIE DRGAŃ WAHADŁA TORSYJNEGO

tekst opracowała: *Bożena Janowska-Dmoch*

Gdy wypadkowy moment siły działający na ciało w każdej chwili kieruje ciało do położenia równowagi, a jego wartość jest proporcjonalna do kąta wychylenia z położenia równowagi, to ciało wykonywać będzie oscylacje wokół tego położenia z częstością ω opisane równaniem różniczkowym, zwanym **równaniem oscylatora harmonicznego**

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0\,,$$

gdzie zmienna θ jest kątem wychylenia ciała.

Cel

Celem pomiarów jest zbadanie drgań wahadła torsyjnego, wyznaczenie stałej torsyjnej sprężyny i momentu bezwładności wahadła.

Wymagania

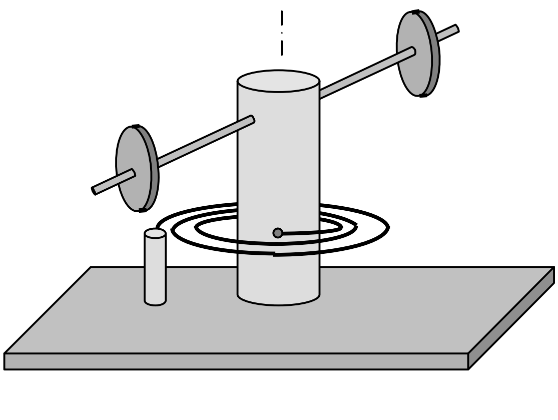
Zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego, twierdzenie Steinera, równanie ruchu oscylatora harmonicznego, parametry opisujące ruch drgający: wychylenie, amplituda, częstość, faza, przesunięcie fazowe prędkość i przyspieszenie. Energia całkowita, potencjalna i kinetyczna w ruchu drgającym, przemiany energii. Wahadło torsyjne.

Literatura

R. Resnick, D. Halliday, Fizyka, tom I, PWN
C. Kittel, W.D. Knight, M.A.Ruderman, Mechanika, *Kurs berkelejowski tom I*, PWN
F.S. Crawford, Fale, *Kurs berkelejowski* tom III, PWN
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki, tom I i II, PWN
A. Piekara, Mechanika ogólna , PWN

Opis przyrządu

Na podstawce znajduje się pionowy walec, osadzony w łożyskach, który może obracać się wokół osi symetrii. W jego górnej części umocowano współliniowo dwa poziome pręty, na które mogą być nakładane obciążniki. Do dolnej części walca przymocowano jeden koniec sprężyny, a drugi koniec przytwierdzono do podstawki. Wychylenie walca z położenia równowagi spowoduje odkształcenie sprężyste sprężyny. Moment siły sprężystości sprężyny powodować będzie oscylacje kąta wychylenia walca wokół położenia równowagi.



Wyprowadzenie wzoru

Gdy wychylimy walec o kąt θ z położenia równowagi, to odkształcenie sprężyny, zamocowanej w pewnej odległości od osi obrotu, spowoduje powstanie momentu siły sprężystej, którego wartość będzie proporcjonalna do odkształcenia

$$\tau = -D \cdot \theta$$

gdzie D jest stałym współczynnikiem, nazywanym **stałą torsyjną sprężyny**, lub **momentem kierującym**.
Zgodnie z drugą zasadą dynamiki ruchu obrotowego moment siły nada ciału o momencie bezwładności I przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \frac{1}{I}\tau .$$

Równanie ruchu wahadła jest więc

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{I}\theta = 0$$

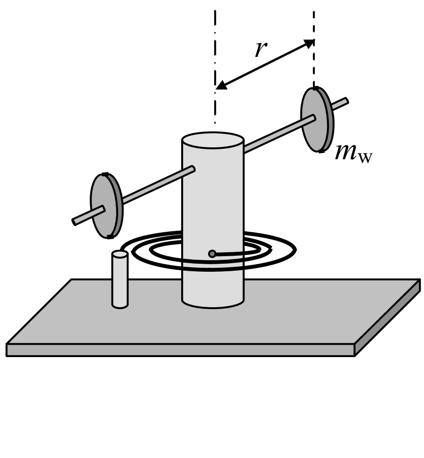
Jest to **równanie oscylatora harmonicznego** opisujące zmiany kąta wychylenia wahadła zachodzące periodycznie w czasie z jedną częstością

$$\omega^2 = \frac{D}{I}$$

a ponieważ $\omega = \frac{2\pi}{T}$, to okres drgań wahadła zapiszemy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} .$$

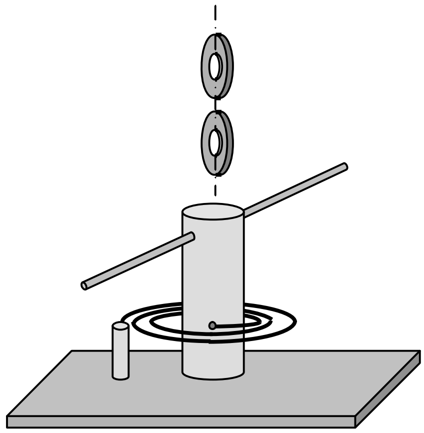
Okres drgań wahadła torsyjnego jest wprost proporcjonalny do pierwiastka z momentu bezwładności wahadła, a odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka ze stałej torsyjnej sprężyny.
Oznaczmy przez I_0 moment bezwładności wahadła nieobciążonego, a jego okres drgań przez T_0, gdzie $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$.



Gdy na prętach umieścimy obciążniki każdy o masie m_w w odległości r od osi obrotu, to moment bezwładności wahadła wzrośnie

$$I = I_0 + 2I_w ,$$

gdzie I_w jest momentem bezwładności obciążnika względem osi obrotu wahadła. Korzystając z twierdzenia Steinera zapiszemy



$$I = I_0 + 2I_w(r=0) + 2m_w r^2,$$

gdzie $I_w(r=0)$ jest momentem bezwładności obciążnika umieszczonego na osi obrotu wahadła (patrz rysunek). Oznaczmy przez I' sumę momentów bezwładności wahadła nieobciążonego i obciążników umieszczonych na osi obrotu

$$I' = I_0 + 2I_w(r=0).$$

I' ma dla wahadła z obciążnikami wartość stałą, niezależną od położenia obciążników na prętach.

Okres drgań wahadła z obciążnikami zapiszemy: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I' + 2m_w r^2}{D}}$, a po podniesieniu do kwadratu

$$T^2 = \frac{8\pi^2 m_w}{D} r^2 + \frac{4\pi^2 I'}{D}$$

otrzymujemy liniową zależność kwadratu okresu wahadła z obciążnikami od kwadratu ich odległości od osi obrotu, którą można zapisać w postaci $T^2 = Ar^2 + B$ o współczynnikach:

$$A = \frac{8\pi^2 m_w}{D} \qquad B = \frac{4\pi^2 I'}{D}.$$

Mierząc okresy drgań wahadła dla różnych położeń obciążników wyznaczymy stałą torsyjną D oraz momenty bezwładności I' i I_0.

Wykonanie ćwiczenia

Wyniki wszystkich pomiarów muszą być zapisane w sprawozdaniu, opatrzone odpowiednimi jednostkami i podpisane przez asystenta.

a) Stoperem mierzymy kilkakrotnie czas kilku (np. pięciu) **pełnych** wahnięć wahadła nieobciążonego.
b) Umieszczamy obciążniki na ramionach wahadła jak najbliżej osi obrotu. Za pomocą miarki wyznaczamy odległość obciążnika od osi obrotu oraz mierzymy kilkakrotnie czas kilku (np. pięciu) **pełnych** wahnięć wahadła.
c) Mierzymy promień otworu w obciążniku, promień zewnętrznym obciążnika oraz jego grubość.
d) Zmieniamy położenia obciążników, rozsuwając je np. co 2 cm symetrycznie, coraz dalej od osi obrotu. . Dla każdego nowego położenia obciążnika mierzymy r_w, a także kilkakrotnie czas kilku (np. pięciu) **pełnych** wahnięć wahadła.

Propozycja zapisu wyników:

r_w $\Delta r_w = ...$	t_1 $\Delta t = ...$	t_2	t_3	t_4	t_5

gdzie Δt jest błędem systematycznym wynikającym z dokładności przyrządu.

Opracowanie wyników

a) Dla każdego położenia obciążnika obliczamy wartości średnie **okresu** drgań. Błędy obliczamy uwzględniając niepewność losową i systematyczną.

b) Na papierze milimetrowym sporządzamy wykres funkcji $T^2(r^2)$, odkładając kwadraty odległości obciążników od osi obrotu na osi poziomej, a kwadraty odpowiednich okresów na osi pionowej. Zaznaczamy również przedziały błędów Δr oraz ΔT. (Wykres można sporządzić wykorzystując programy komputerowe).

c) Metodą najmniejszych kwadratów (regresji liniowej) wyznaczamy współczynnik A nachylenia prostej najlepiej dopasowanej do punktów pomiarowych i wartość B, czyli przecięcie prostej z osią y. Nanosimy tę prostą na wykres. Wyznaczamy również błędy ΔA i ΔB.

d) Obliczamy stałą torsyjną sprężyny D i moment bezwładności I' wiedząc, że masa obciążnika $m_w = 148{,}6\text{g} \pm 0{,}1\text{g}$. Błędy ΔD i $\Delta I'$ liczymy metodą propagacji niepewności pomiarowych.

e) Obliczamy moment bezwładności I_0, korzystając z pomiarów okresu wahadła nieobciążonego i wyznaczonej stałej D.

f) Obliczamy moment bezwładności $I_w(r=0)$ ze wzoru $I_w(r=0) = \frac{1}{12} m_w \left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right)$, gdzie r_1 jest promieniem otworu w obciążniku, r_2 jest promieniem zewnętrznym obciążnika, h jest jego grubością.

g) Obliczamy moment bezwładności I_0, korzystając z wyznaczonego momentu I' i obliczonej wartości $I_w(r=0)$.

h) We wnioskach spróbujmy ocenić

- czy wyniki pomiarów potwierdzają liniową zależność kwadratu okresu drgań od kwadratu odległości obciążników od osi obrotu;
- czy wartości momentu bezwładności I_0 wyznaczonego w punkcie e) są zgodne w granicach błędów doświadczalnych z wartościami z punktu g) oraz która z tych wielkości jest wyznaczona z większą dokładnością.